不変トーラスとしてのソリトン(ソリトン系のダイナミックスとそれに関するカオスの問題,研究会報告)

$$\psi \sim e^{i(px-\omega t)}, \quad \omega = \pm\sqrt{p/\sigma} \tag{5}$$

を得るので，$p<0$のときにψは不安定解を与えている。これは，(1) で臨界波数 k_c より小さな波数の波が不安定であったことと関係している。

$\phi=0$とすれば(4)は容易に解けて，$p<0$なる平面波に対して

$$\left.\begin{aligned} &\psi = A e^{i(px-\omega t)} \operatorname{sech}\left[Kx - \Omega(t-t_0)\right] \\ &p/K = \sinh\theta \quad , \qquad A = \sqrt{2\sigma/\lambda}\,\Omega \\ &\Omega = \sqrt{K/2\sigma}\ e^{-\theta/2} \quad , \qquad \omega = \sqrt{K/2\sigma}\ e^{\theta/2} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

を得る。こゝでp (<0) を固定して$K\to 0$として，

$$K\ e^{-\theta} = -2p$$

に注意すれば

$$\psi = \sqrt{\frac{2|p|}{\lambda}}\ e^{ipx} \operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{|p|}{\sigma}}\ (t-t_0)\right) \tag{7}$$

となる。これは$t\to\pm\infty$で線形解(5)につながる。(6)からわかるように，不安定波動は時空的にソリトン構造を持ち得る。実際にこのような傾向は，(1) を数値積分することによって，じっさいに確かめることができる。

ψ場とϕ場の結合したソリトンや，(1) を多次元化したときのcollapse 過程など興味のある問題が考えられるが，これからの問題である。

不変トーラスとしてのソリトン

名大・理　野　崎　一　洋

§1.　はじめに

ソリトンは無限自由度の完全可積分なハミルトン系における分離可能な有限自由度に対応しているが，実際の物理系では摂動（例えば高次項）のため一般に可積分性は破れている。ところが，ソリトンが，実際に観測されている事実は，種々の小さな摂動に対するソリトンの安定

性を示唆している。しかし，可積分性が破れた状況で存在するソリトンは，不規則な振る舞い（ソリトンのカオス）をする可能性がある。実際，散逸性の摂動に対して，ソリトンが，低次元のカオス的アトラクターとなる場合があることが示されている。[1] ここでは，保存性の摂動に対するソリトンの安定性を，位相空間が有限であるようなソリトンをもつ非線形シュレーディンガー方程式について議論する。

§2. 摂動論的考察 ― 有限次元トーラスとしてのソリトン

非線形シュレーディンガー方程式の空間的に対称な，n・ソリトンの「束縛状態」は，摂動がなければ，ソリトンの作用・角変数空間のn次元トーラスをなし，n個のソリトンが常に相互作用をしながら閉じた系をつくっている。このような系に，次のような高次の非線形項と外力を摂動として加える。

$$\mathrm{i}q_t + q_{xx} + 2\,|\,q|^2 = -2\,\varepsilon_n |\,q|^4\,q - \mathrm{i}\varepsilon_0\,, \tag{1}$$

ここで，ε_n，ε_0 は 小さな実摂動パラメーター。１次の摂動理論の枠内では，n・ソリトン系は，非摂動系と同様の有限次元性を保持することが示せる（n 次元トーラスは壊れる場合もあるが）。従って，有限次元非可積分ハミルトン系において良く知られている結果が，ソリトン系においても，少なくとも，１次の摂動論の範囲内では有効であろう。例えば，摂動が十分小さく，ソリトンの振動数比が十分非有理なら，ソリトンは有限次元不変トーラスとして安定である（KAM 理論）。振動数比が有理数のソリトンは，部分トーラスに分裂し，セパラトリックス付近のソリトンは，不規則な振動をする（ホモクリニック・カオス）。ところが，高次の摂動効果を考慮に入れると，ソリトン―ソリトンの「非弾性的」相互作用により，輻射が現われ，系の自由度は大幅に増えるため，ソリトンのみの有限次元系で得られた結果が有効であるという保証はない。そこで，(1) の数値実験を行うことにより，小さな輻射が共存しても，ソリトン部分に着目すれば，有限次元系として予想される結果が有効であることを次節で述べる。

§3. 数値実験

数値実験は，(A) $\varepsilon_n \neq 0$,　$\varepsilon_0 = 0$,　(B) $\varepsilon_n = 0$,　$\varepsilon_0 = 0$, の場合について，２・と ３・ソリトンについて行った。(A) では，ハミルトニアン（と運動量）以外に「質量」が保存し,(B) では，前者以外の保存量はない。この保存量の差は，少数のソリトン系では顕著に現われる。１次の摂動論の枠内では，２・ソリトン系は (A) の場合，振動数比が有理数でも非共鳴で，かつ可積分であるが，(B) では，非可積分で，振動数比が特定の有理数の場合，２・トーラスは

部分トーラスに分離し，ホモクリニック・カオスが起こる。これらの1次の摂動論による予想は，数値実験において，ソリトン部分に着目することにより，小さな輻射が現われるにもかかわらず，定性的に正しいことが確認された。3・ソリトン系においては，共鳴トーラス（有理比のトーラス）の重なりによる大域的カオスが原因と思われる「束縛状態」の解離現象が観測された。このように，摂動が十分小さければ，2次的な輻射も小さく，かつ，かなり長時間にわたっても，ソリトンには「悪影響」を及ぼさず，無理比トーラスに対応するほとんどの n・ソリトンは安定であることが期待される。これは，ソリトンと輻射との間に質的な差があることによると思われる。例えば，ソリトンは「discrete」な自由度に対応し，輻射は連続的な自由度であることが関係しているかも知れない。

§4. おわりに

ここで議論したソリトンの有限次元トーラスとしての性質は，位相空間が有限な他のソリトンに対しても同様に適用され得るが，KdV ソリトンのような位相空間が有限でないソリトンに対しては，トーラスとしての興味ある特性はない。このようなソリトンに対しては，むしろ，問題はより簡単で，ソリトン−ソリトン相互作用は，短い時間の間に終了してしまうので，摂動が十分小さければ，1・ソリトンが安定なら，n・ソリトンの安定性はほとんど問題にならないと思われる。

参 考 文 献

1） 野崎一洋，戸次直明，月刊フィジクス，6（1985）534.

減衰のあるときのひもの運動と非線型シュレディンガー方程式

京大・基研　小 貫　　明

§1. ひもの運動を記述する非線型シュレディンガー方程式

一般に3次元での曲線は　曲率 κ と捩率 τ で完全に記述できる。s を曲線にそった長さとすると，次の Frenet-Seret 公式はよく知られている。

$$\frac{\partial}{\partial s}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{t}, \quad \frac{\partial}{\partial s}\boldsymbol{t} = \kappa\boldsymbol{n} \quad ,$$